O jogo do carro e dos bodes: um problema de probabilidades que «deu que pensar»!

CARLA HENRIQUES
Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Há alguns anos atrás surgiu uma grande controvérsia acerca de um problema de probabilidades relacionado com um jogo de um concurso televisivo. O concurso chamava-se "Let's make a deal" e o jogo é conhecido por jogo do carro e dos bodes, ou por jogo das três portas, ou ainda por jogo de Monty Hall, sendo este último o nome do apresentador do concurso desde 1963 a 1990.

No referido jogo o concorrente tem à sua frente três portas fechadas e sabe que por trás de uma das portas está um carro, enquanto que por trás das restantes duas portas está um bode em cada uma. O concorrente escolhe uma porta tendo o direito de ficar com o que se encontra por de trás desta. Obviamente, o concorrente pretende ganhar o carro e não um bode.

Agora suponhamos que a porta escolhida pelo concorrente não é aberta imediatamente. Em vez disso, o apresentador abre uma das outras portas, que revela um bode, e dá a oportunidade ao concorrente de trocar a porta por ele escolhida pela outra que ainda se encontra fechada.

Qual das duas estratégias, trocar ou não trocar, dá ao concorrente mais chances de ganhar o carro?

Esta questão foi colocada a Marilyn Vos Savant, por um leitor da sua coluna, "Ask Marilyn", na revista "Parade Magazine", em Setembro de 1990.

De acordo com a resposta de Marilyn Vos Savant, o concorrente deveria trocar de portas, pois a probabilidade de ganhar o carro se aceitar trocar de porta é 2/3, enquanto que se não trocar, a probabilidade é de apenas 1/3.

A resposta de Marilyn Vos Savant desencadeou uma polémica discussão envolvendo leitores da revista, matemáticos, cientistas, entre outros. De facto, após a publicação da sua resposta, Marilyn Vos Savant recebeu milhares de cartas, grande parte delas discordando da solução apresentada por ela. Para os que discordavam, as chances de ganhar o carro são as mesmas, quer o concorrente opte por trocar de porta, ou não.

Segundo alguns oponentes, havendo duas portas fechadas, a que foi inicialmente escolhida pelo concorrente e a que o apresentador oferece em troca, a probabilidade de o carro se encontrar por trás de qualquer uma delas é ½.

Alguns leitores chegaram a simular o jogo em computador para saber se Marilyn estava correcta ou não.

Nos números que se seguiram, Marilyn Vos Savant publicou algumas cartas, entre as quais, cartas de académicos indignados com a sua resposta. Marilyn manteve sempre a sua posição inicial, apresentando novos argumentos.

Seguem-se alguns estratos de cartas enviadas a Marilyn:

> ‘Our math department had a good, self-righteous laugh at your expense”
>
> Mary Jane Still, Professor of Palm Beach Junior College

> “You blew it! Let me explain: If one door is shown to be a loser, that information changes the probability of either remaining choice – neither of which is has any reason to be more likely – ½. As a professional mathematician, I’m very concerned with the general public’s lack of mathematical skills. Please help by confessing your error and, in the future, being more careful”

Robert Sachs, Professor of Mathematics at George Mason University in Fairfax

"You are utterly incorrect. How many irate mathematicians are needed to get you to change your mind?"
E. Ray Bobo, Professor of Mathematics at Georgetown University

De que lado está a razão?

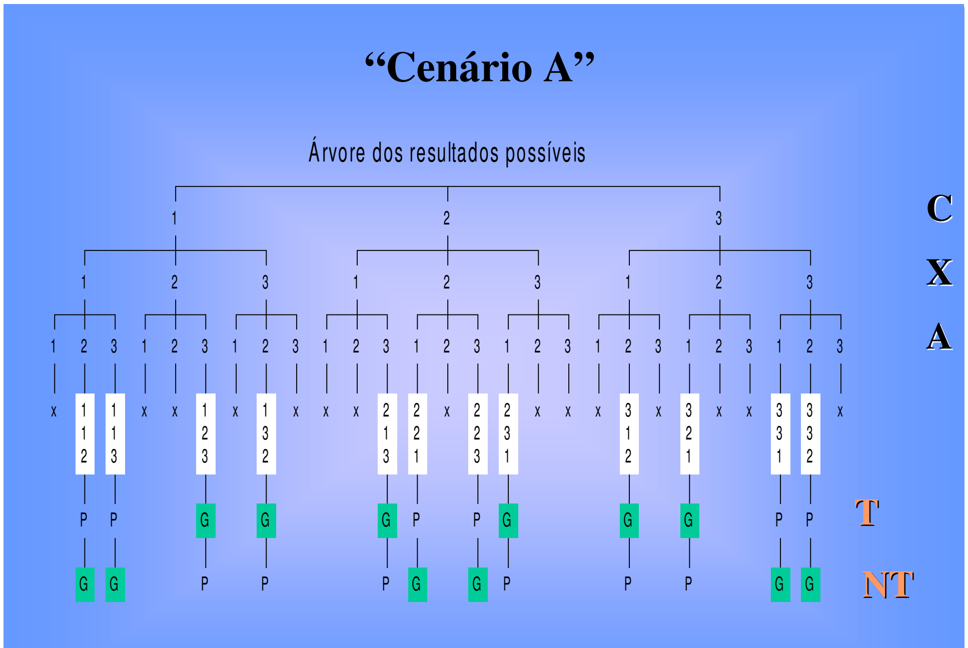
Antes de iniciar a análise do problema é indispensável saber qual é a estratégia do apresentador do programa:

- O apresentador sabe o que está por trás de cada porta e nunca abre uma porta com carro. Se o concorrente escolher a porta com carro, ele escolhe uma das outras duas ao acaso e abre-a; se o concorrente escolher uma porta com bode, o apresentador abre a outra porta com bode que resta. Chamaremos a este cenário o "Cenário *A*";
- O apresentador desconhece o que está por trás de cada porta e, portanto, ao abrir uma porta, escolhe ao acaso entre as duas que não foram escolhidas pelo concorrente. Designaremos este cenário por "Cenário *B*".

De facto, nem a questão colocada a Marilyn, nem a sua resposta, eram claras quanto a estes pressupostos. Veremos que a clarificação destes pressupostos é fundamental para dar uma resposta correcta.

Representemos por C o número da porta que esconde o carro, por X o número da porta escolhida inicialmente pelo concorrente e por A o número da porta aberta pelo apresentador. Obviamente, C, X e A são variáveis aleatórias discretas, podendo assumir os valores 1, 2 ou 3. Mais, a escolha do concorrente, X, é independente do número da porta onde está o carro, C, pois quando o concorrente faz a sua escolha desconhece a porta onde se situa o carro e, como tal, a sua escolha não é influenciada pelo valor de C. Por outras palavras, as variáveis aleatórias C e X são independentes.

Para o **Cenário *A***, a figura seguinte apresenta todos os resultados possíveis.



Legenda:
x :resultado impossível neste cenário,
G: o concorrente **g**anha o carro;
P: o concorrente **p**erde, i. e., não ganha o carro;
T: o concorrente troca a porta escolhida inicialmente pela que o apresentador lhe oferece;
NT: o concorrente não aceita a troca.

Figura 1: Árvore dos resultados possíveis para o Cenário *A*.

Repare-se que se o concorrente seguir a estratégia de trocar a porta inicialmente escolhida pela que o apresentador lhe oferece - *T*, então, em doze resultados possíveis, há seis resultados que o tornam "ganhador". Isto poder-nos-ía levar a concluir que a probabilidade de o concorrente ganhar trocando de porta é 6/12=0.5. O mesmo se diria se a estratégia do concorrente fosse a de manter a escolha feita inicialmente -*NT*. Este raciocínio só estaria correcto se os doze resultados possíveis fossem igualmente prováveis, o que de facto não é verdade.

Vamos calcular a probabilidade de ocorrência de cada um dos resultados possíveis usando a regra da multiplicação. Esta regra, para três acontecimentos aleatórios, traduz-se da seguinte maneira:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).\, P(B \mid A).\, P(C \mid A \cap B)$$

isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de A, B e C, $P(A \cap B \cap C)$, é igual ao produto da probabilidade de ocorrência de A, $P(A)$, pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que ocorreu A, $P(B|A)$, e pela probabilidade de ocorrência de C sabendo que ocorreram simultaneamente A e B, $P(C|A \cap B)$.

Recordando a árvore da Figura 1, os resultados que tornam o concorrente "ganhador", no caso deste seguir a estratégia de **trocar** de portas - T, são:

$C=1 \cap X=2 \cap A=3$

$C=1 \cap X=3 \cap A=2$

$C=2 \cap X=1 \cap A=3$

$C=2 \cap X=3 \cap A=1$

$C=3 \cap X=1 \cap A=2$

$C=3 \cap X=2 \cap A=1$

Podemos calcular a probabilidade de cada um deles:

- $P(C=1 \cap X=2 \cap A=3) = P(C=1)\ P(X=2 \backslash C=1)\ P(A=3 \backslash X=2 \cap C=1)$.

  Uma vez que as variáveis C e X são independentes, tem-se $P(X=2 \backslash C=1)=P(X=2)$, donde

  $P(C=1 \cap X=2 \cap A=3) = P(C=1)\ P(X=2)\ P(A=3 \backslash X=2 \cap C=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{9}$.

  Note que, havendo três portas disponíveis, a probabilidade do carro se encontrar na porta número 1 é, obviamente, 1/3, isto é, $P(C=1)=1/3$.

Assumindo que o concorrente escolhe uma porta ao acaso, a probabilidade de este escolher a porta número 2 é também 1/3-$P(X=2)=1/3$. Finalmente, sabendo que o carro se encontra na porta número 1 e que o concorrente escolheu a porta número 2, o apresentador só tem uma possibilidade que é a de abrir a porta número 3, logo $P(A=3\backslash X=2\cap C=1)=1$.

- $P(C=1\cap X=3\cap A=2) = P(C=1)\, P(X=3\backslash C=1)\, P(A=2\backslash X=3\cap C=1)$.

$$= P(C=1)\, P(X=3)\, P(A=2\backslash X=3\cap C=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{9}\,.$$

Fazendo o mesmo raciocínio para os quatro acontecimentos que restam, obteríamos o mesmo resultado, isto é:

$$P(C=2\cap X=1\cap A=3) = P(C=2\cap X=3\cap A=1) = P(C=3\cap X=1\cap A=2) =$$
$$= P(C=3\cap X=2\cap A=1) = \frac{1}{9}\,.$$

Então, se o concorrente trocar de portas, a probabilidade de ganhar é $6\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$.

Por outro lado, mais uma vez recordando a árvore da Figura 1, se o concorrente mantiver a sua escolha inicial, isto é, **não trocar** de portas - **NT**, há 6 resultados nos quais ele ganha o carro:

$$C=1\cap X=1\cap A=2$$
$$C=1\cap X=1\cap A=3$$
$$C=2\cap X=2\cap A=1$$
$$C=2\cap X=2\cap A=3$$
$$C=3\cap X=3\cap A=1$$
$$C=3\cap X=3\cap A=2$$

A probabilidade do primeiro é dada por:

$$P(C{=}1 \cap X{=}1 \cap A{=}2) = P(C{=}1)\ P(X{=}1 \backslash C{=}1)\ P(A{=}2 \backslash X{=}1 \cap C{=}1).$$

Uma vez que as variáveis C e X são independentes, tem-se $P(X{=}1 \backslash C{=}1){=}P(X{=}1)$, donde

$$P(C{=}1 \cap X{=}1 \cap A{=}2) = P(C{=}1)\ P(X{=}1)\ P(A{=}2 \backslash X{=}1 \cap C{=}1){=}\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\ .$$

Note a diferença relativamente à situação anterior. Agora, sabendo que o carro se encontra na porta número 1 e que o concorrente escolheu a porta número 1, o apresentador tem duas possibilidades: abrir a porta 2 ou 3, pois ambas escondem um bode e nenhuma foi escolhida pelo concorrente. Assim, admitindo que ele escolhe uma delas ao acaso, tem-se $P(A{=}2 \backslash X{=}1 \cap C{=}1){=}1/2$.

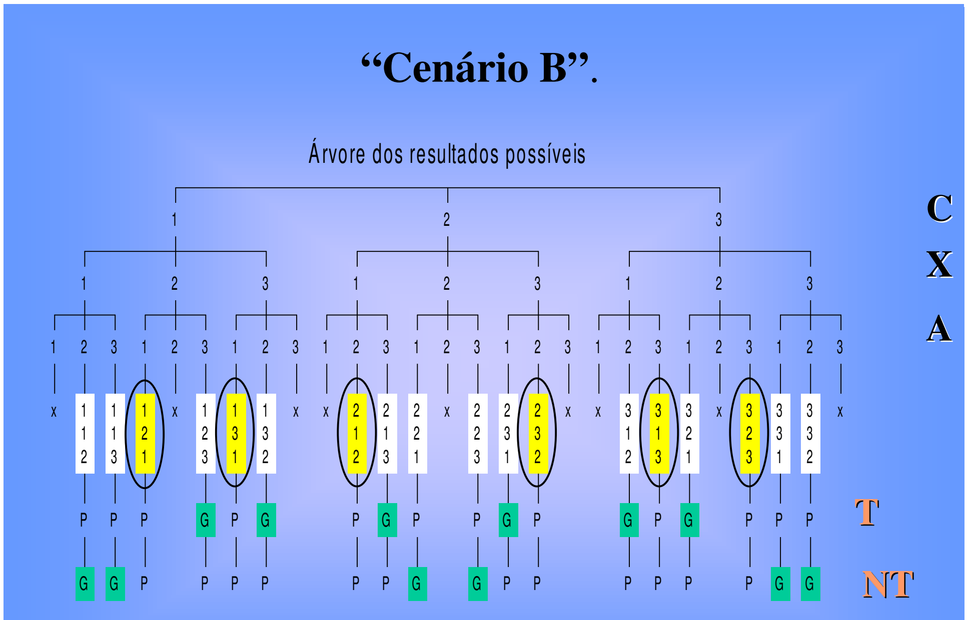
Para os restantes resultados, o mesmo raciocínio conduziria à mesma probabilidade - $\frac{1}{18}$. Isto é, cada um destes seis resultados ocorre com metade da probabilidade de qualquer um dos outros seis.

Assim, se o concorrente não trocar de portas, a probabilidade de ganhar é $6\times\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$.

Podemos então concluir que a resposta de Marilyn Vos Savant está correcta no Cenário A.

No entanto, se nos situarmos no Cenário B, o mesmo já não se passa.

A figura seguinte apresenta a árvore dos resultados possíveis no Cenário B.



Legenda:
x :resultado impossível neste cenário;
G: o concorrente **g**anha o carro;
P: o concorrente **p**erde, i. e., não ganha o carro;
T: o concorrente troca a porta escolhida inicialmente pela que o apresentador lhe oferece;
NT: o concorrente não aceita a troca.

Figura 2: Árvore dos resultados possíveis para o Cenário *B*.

Note-se que agora há dezoito resultados possíveis, no entanto, os resultados que surgem a mais relativamente ao cenário anterior (assinalados com uma elipse) são resultados de perda para o concorrente, pois correspondem a situações em que o apresentador abre a porta que esconde o carro.

Se o concorrente **troca** de porta - *T*, mais uma vez, há seis resultados que o tornam "ganhador":

$$C=1\cap X=2\cap A=3$$
$$C=1\cap X=3\cap A=2$$
$$C=2\cap X=1\cap A=3$$
$$C=2\cap X=3\cap A=1$$
$$C=3\cap X=1\cap A=2$$
$$C=3\cap X=2\cap A=1.$$

Qualquer um destes seis resultados tem probabilidade $\frac{1}{18}$ de ocorrer. A título de exemplo calculemos a probabilidade do primeiro:

$$P(C=1\cap X=2\cap A=3) = P(C=1)\ P(X=2)\ P(A=3\backslash X=2\cap C=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\ .$$

Note que, sabendo que o carro se encontra na porta número 1 e que o concorrente escolheu a porta número 2, o apresentador, que neste cenário desconhece a porta que esconde o carro, tem duas possibilidades de escolha: abrir a porta 1 que esconde o carro ou a porta 3 que esconde um bode. Então, $P(A=3\backslash X=2\cap C=1)=1/2$.

Assim, trocando de porta, o concorrente ganha o carro com probabilidade $6\times\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$.

Por outro lado, se o concorrente **não trocar** de portas - *NT*, há também seis resultados nos quais o concorrente ganha o carro:

$$C=1\cap X=1\cap A=2$$
$$C=1\cap X=1\cap A=3$$
$$C=2\cap X=2\cap A=1$$
$$C=2\cap X=2\cap A=3$$
$$C=3\cap X=3\cap A=1$$
$$C=3\cap X=3\cap A=2.$$

Todos estes resultados têm também probabilidade $\frac{1}{18}$ de ocorrer, o que facilmente se comprava seguindo o raciocínio anterior. Logo, se o concorrente não trocar de portas, a probabilidade de ele ganhar o carro é também $6 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$.

Podemos então concluir que a resposta de Marilyn Vos Savant não está correcta neste cenário, pois, quer o concorrente opte por trocar ou não, a probabilidade de ele ganhar o carro é a mesma - 1/3.

Salienta-se que na questão colocada a Marilyn Vos Savant, sabia-se à partida que a porta aberta pelo apresentador revelava um bode. De facto, no Cenário *A* isso acontece sempre, mas o mesmo já não se passa no Cenário *B*. No cenário *B*, o conhecimento à priori deste facto elimina os seis resultados assinalados com uma elipse (pois nestes o apresentador abre a porta que esconde o carro) ficando apenas doze resultados possíveis igualmente prováveis. Destes doze resultados, o número de resultados favoráveis ao concorrente ganhar o carro, quer opte por trocar de porta ou não, são seis. Então, neste cenário, sabendo à partida que a porta aberta pelo apresentador revela um bode, a probabilidade de ganhar o carro trocando ou não é ½. Portanto, aqueles que contestavam a resposta de Marilyn Vos Savant estão correctos, se estivermos a considerar o Cenário *B*.

Referências

[1] Hall, Andreia, *Trocar ou não trocar? eis a questão*, Folha informativa nº 9 – Jan/99 da Sociedade Portuguesa de Matemática.
[2] http://www.math.uah.edu/stat/games/games6.html
[3] http://www.dartmouth.edu/~chance/course/topics/Monty_Hall.html
[4] http://members.dandy.net/~mjyoung/doors.htm
[5] http://www.math.toronto.edu/mathnet/games/monty.html