A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA ARTE DE M. C. ESCHER*

PATRÍCIA ALEXANDRA DA SILVA RIBEIRO SAMPAIO [1]

[1] Docente da Escola Profissional de Fermil, Celorico de Basto,
e associada a projeto de investigação na Universidade do Minho – Portugal. (e-mail: patisampaio@gmail.com)

Resumo

A Matemática sempre caminhou ao lado da Arte. A criatividade, a beleza e o dinamismo são algumas das qualidades que associamos à Arte, mas também à Matemática. A obra de M. C. Escher é mais um exemplo de como as imagens (Arte) podem limar o entendimento de temas complexos da Matemática. A obra deste artista pode ser dividida em quatro períodos diferentes: “paisagens”, “metamorfoses”, “gravuras subordinadas à perspetiva” e “aproximação ao infinito”, destacando-se os últimos três numa fase da sua vida após 1937. Apresenta-se uma pequena descrição de cada um destes períodos da sua vida e como se relacionam com a Matemática.

Palavras-chave: arte, matemática, Escher.

Abstract

Mathematics and Art always walked beside. Creativity, beauty and dynamism are some of the qualities we associate with Art, but also to Mathematics. M. C. Escher’s work is another example of how images (Art) can iron out the understanding of Mathematics complex subjects. The work of this artist can be divided into four different periods: "landscapes", "metamorphoses", "subject to the engravings perspective” and "approach to infinity", emphasizing the last three in a phase of his life after 1937. It is presented a brief description of each of these periods of his life and how they relate to Mathematics.

Keywords: art, mathematics, Escher.

* **NOTA:** Todas as imagens referidas neste artigo podem ser encontradas e visualizadas na página oficial da Fundação M. C. Escher, no endereço eletrónico <http://www.mcescher.com>, no menu *Downloads* e *Picture Gallery*.

Já na Antiguidade a Matemática surgia associada à Arte. Sempre houve uma preocupação de estabelecer um ideal estético. Quem nunca ouviu falar da *razão dourada*? Os inúmeros monumentos construídos na época áurea da Grécia foram arquitetados de acordo com essa razão, basta tomarmos o exemplo da Acrópole. E quem não ouviu falar da série de Fibonacci, que explica a reprodução dos coelhos? E que nos diz que a razão entre termos sucessivos também tende para o *número de ouro*.

Segundo Martinho (1996, p. 42), a "Arte e a Ciência caminharam juntas durante muitos séculos, não sendo difícil reconhecer que comportam um fator comum essencial: a criatividade como motor gerador de formas e ideias". O mundo matemático e o mundo da arte estão intrinsecamente relacionados. Escher (1994 [1959], p. 6) felizmente descobriu esta relação metafísica e acrescenta:

> Todas as reproduções (numeradas neste livro) foram produzidas com a intenção de esclarecer uma determinada linha de pensamento. As ideias que lhe estão por base testemunham, na maior parte, o meu espanto e admiração em face das leis da natureza que operam no mundo à nossa volta. Aquele que se maravilha com alguma coisa tem ele mesmo a consciência da maravilha. Olhando de olhos abertos os enigmas que nos rodeiam e ponderando e analisando as minhas observações entro em contacto com o domínio da Matemática. Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exatas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão.

A Matemática não é uma mecanização de conceitos, trata-se de uma necessidade, de uma arte a descobrir por todos. Esta relação fecunda possui um potencial pedagógico no ensino da Matemática. Notemos que de acordo com vários estudos realizados, se conclui que as imagens são mais eficazes em memória que apenas palavras, já que, de acordo com Lieury (1997, p. 49), "a memória de imagens é extremamente poderosa e duradoura (…) mas a memória das imagens não é a memória "fotográfica" da conceção popular, mas sim a da síntese da imagem", tratando-se então do resultado de variados mecanismos. Para ler uma imagem, temos sempre de a associar a palavras/conceitos, o que leva mais tempo, mas permite uma melhor memorização.

Para Munari (1968, p. 19-20) "conhecer as imagens que nos rodeiam significa também alargar as possibilidades de contacto com a realidade, significa ver mais e perceber mais". A obra de Escher é um exemplo concreto de como as imagens podem aperfeiçoar o entendimento de assuntos complexos, ao invés da exclusiva utilização de palavras. Através das suas pavimentações, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões, tornando-as mais simples aos nossos olhos.

A geometria permite que os alunos experimentem a interação criativa entre a Matemática e a Arte. Tomemos o exemplo da repetição de um polígono regular em torno de um ponto, sem sobreposição, à exceção da existência de lados comuns, e a sua representação no papel, que conduzirá os estudantes a descortinar se esse polígono pode ou não ser usado para pavimentar o plano. A divisão regular de uma superfície é, segundo Escher (1994 [1959], p. 7):

"A fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respetivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem *áreas livres*."

O uso de cores contrastantes para colorir o preenchimento de superfícies de uma forma sistemática era de primordial importância para sublinhar a individualidade dos motivos adjacentes. Para ele o uso da cor é imprescindível, assim como para Dondis (1997 [1976], p. 64-69):

A cor está carregada de informação e é uma das experiências visuais mais penetrantes que todos temos em comum. Portanto, constitui uma valiosíssima fonte de comunicações visuais. (…) Também conhecemos a cor englobada numa ampla categoria de significados simbólicos. (…) Cada cor tem numerosos significados associativos e simbólicos. Por exemplo, a cor oferece-nos um enorme vocabulário de grande utilidade no alfabeto visual. (…) Há três cores primárias ou elementares: amarelo, vermelho, azul. Cada uma representa qualidades fundamentais. O amarelo é a cor que se considera mais próxima da luz e do calor; o vermelho é a mais emotiva e ativa; o azul é passivo e suave.

Reparemos ainda nas formas elementares usadas como padrão. Como demonstra a Matemática, as únicas formas utilizadas são os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares (figura 1), porque só é possível realizar divisões regulares do plano com estes três polígonos regulares.

Figura 1: Possíveis divisões regulares do plano.

Como foi já referido, só o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser usados isoladamente como padrão de pavimentação, mas se repararmos nas imagens de Escher, ele não aparenta usar qualquer um destes polígonos. Aqui está o erro! Se repararmos agora, com mais atenção, para as mesmas imagens, verificamos que este desenhador decidiu usar a Arte para ludibriar a Matemática. Pegou num quadrado e *recortando* aqui e ali conseguiu transformá-lo num peixe com a mesma área (figura 2). Deste modo, as figuras *encaixam* perfeitamente nas pavimentações do plano e são bastante mais atraentes do que um simples quadrado. Do mesmo modo, Escher pegou num triângulo equilátero e transformou-o noutra imagem mais apelativa (figura 3). Como um hexágono regular é constituído por seis triângulos equiláteros, depois de modificado o triângulo, facilmente se constata que o hexágono também se altera. Aqui vemos a função apelativa da comunicação visual. Escher criou imagens sempre a pensar nesta ideia de atuar sobre os destinatários, de os cativar, daí o uso da cor e de figuras mais agradáveis.

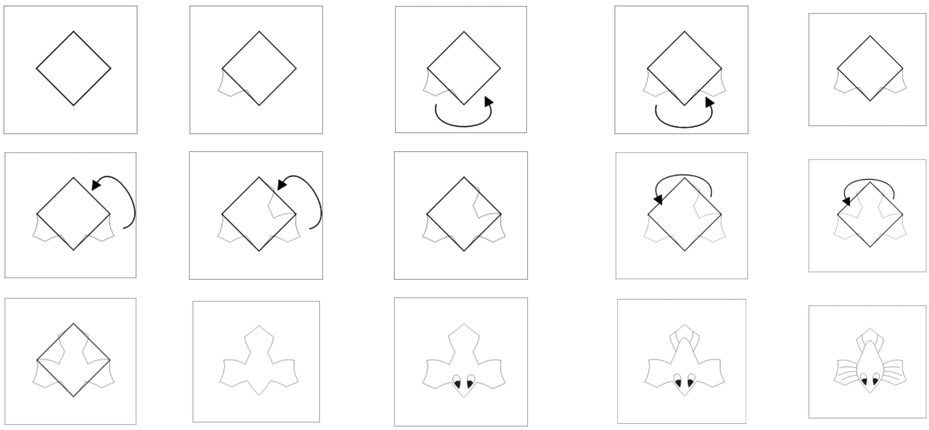

Figura 2: Transformação de um quadrado num peixe com a mesma área.

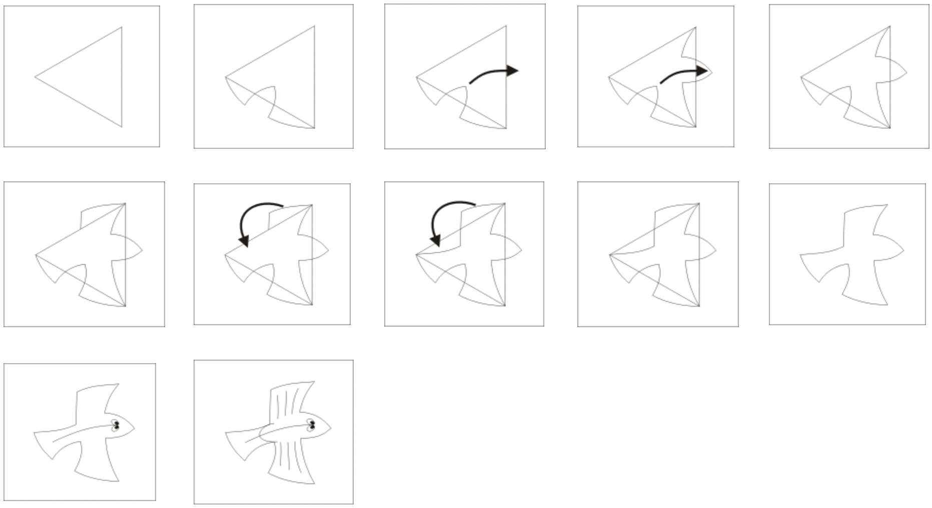

Figura 3: Transformação de um triângulo equilátero num peixe com a mesma área.

Um dos principais elementos matemáticos presentes na sua obra é a representação de *sólidos platónicos*: o tetraedro (quatro faces triangulares regulares), o cubo (seis faces quadrangulares), o octaedro (oito faces triangulares regulares), o dodecaedro (doze faces pentagonais regulares) e o icosaedro (vinte faces triangulares regulares). Reparemos nos três octaedros regulares no centro da obra intitulada *Estrelas* (1948) e os inúmeros sólidos platónicos simples, duplos ou triplos que pairam no ar, quase flutuando como estrelas, daí o uso do fundo negro, para anunciar uma noite estrelada. Escher fez mesmo alguns sólidos regulares de madeira e de vidro acrílico. Não como modelos para os seus desenhos, mas como obras de arte independentes. Uma das peças mais emblemáticas é o *Poliedro com Flores* que Escher esculpiu em madeira de ácer, em 1958, e consiste em cinco tetraedros que se interpenetram.

A representação da realidade tridimensional em superfícies planas está presente nos desenhos do homem desde sempre, mas atingiu um marco importante no século XV com a descoberta da perspetiva. Pois bem, Escher decidiu explorar em profundidade as leis da perspetiva. Podemos mesmo dizer que algumas das suas obras mais conhecidas são talvez os *Mundos impossíveis*, em que ele desenhou figuras aparentemente tridimensionais mas impossíveis de serem construídas. Ele misturou o impossível com um cenário aparentemente real, traduzindo-se numa harmonia e estimulando a imaginação matemática.

Segundo Martinho *et al*. (1998, p. 21), "inicialmente denominado por Escher como casa fantasma, Belvedere (1958) apresenta uma estrutura arquitetónica incoerente que resulta da *ligação impossível* entre o piso superior e o piso inferior". A imagem transmite uma certa harmonia numa primeira leitura muito superficial, mas para quem a observa com um pouco mais de atenção, já transmite desconforto e inquietude. Num sentido conotativo, Escher tentou mostrar como o homem não presta atenção ao mundo que o rodeia. O autor (1994 [1959], p. 16) acrescenta que "o rapaz, que está sentado no banco, tem nas mãos uma tal absurdidade, em forma de cubo. Ele observa pensativamente o objeto impossível e não parece ter consciência de que o Belvedere, atrás das costas dele, é construído desta forma impossível". Portanto, talvez possamos concluir que o autor tenha tentado alertar-nos para os problemas que estão mesmo à nossa frente e nós é que não os queremos ver. Coxeter (1988) considera que estes *Mundos impossíveis*, apesar de aparentemente não estarem relacionados com a Matemática, nos conduzem a universos fantásticos.

Segundo Calado (1994, p. 41), "a aprendizagem que fizemos da perspetiva conduz-nos a tentar perceber como um objeto tridimensional, uma forma que não reproduz (nem tão-pouco antecipa) nenhum objeto real, pelo simples facto de que não é construtível".

Desde a Grécia antiga que o absurdo tem sido objeto de estudo. Zenão de Eleia (século V a.C.) já introduzia o absurdo aparente como princípio de raciocínio filosófico. São do conhecimento da sociedade moderna os *paradoxos de Zenão* e as provas matemáticas de impossibilidade do movimento, fruto da ilusão dos sentidos. Há uma identificação do absurdo com o conceito de algo fora dos limites da compreensão racional.

Estamos habituados a observar o espaço representado no plano sem que nos crie qualquer tipo de confusão, no entanto, por várias vezes, Escher decidiu criar um conflito visual. Tomemos o exemplo da obra *Desenhando-se* (1948), em que, segundo Martinho *et al.* (1998, p. 19), "convencemo-nos de que uma mão é tridimensional e, no entanto, está a ser desenhada numa folha de papel, bidimensional, pela outra mão. O conflito toma contornos ainda mais expressivos pelo facto de o mesmo braço surgir bidimensional no pulso e tridimensional nas mãos". Esta litografia pode conotar-se com a consciência que se constrói, misteriosamente, inseparável dela mesma. Um dos principais elementos matemáticos presentes na sua obra é a representação do espaço. Ele não deixa intacto o espaço, podendo aparecer vários espaços sobre uma mesma imagem, como é o caso desta litografia.

O último período da obra de M. C. Escher pode ser caracterizado como uma "aproximação ao infinito", segundo Ernst (1991 [1978], p. 23), mas não descuremos que o infinito é uma constante da sua obra. De acordo com Maor (1991 [1987], p. 166), o trabalho realizado por Escher sobre o infinito pode ser caracterizado em três tipos: "ciclos", "preenchimento de superfícies" e "limites".

Por um ciclo entende-se o "fenómeno que ocorre sempre que, por deslocações para cima ou para baixo através dos níveis de um sistema hierárquico qualquer, nos encontramos surpreendentemente de volta ao ponto de partida" (Martinho *et al.*, 1998, p. 23). Verifica-se que implícito ao conceito de ciclo está a noção de *infinito potencial*, porque é representado um processo que não termina. Um exemplo de um ciclo recorrente organizado em seis passos é a litografia de 1961 *Queda d'água* em que "a água duma cascata põe em movimento a roda de um moinho e corre depois para baixo, numa calha inclinada entre duas torres, devagar, em ziguezague, até ao ponto em que a queda d'água de novo começa" (Escher, 1994 [1959], p. 16). Após ter visto o *Tribar* de Penrose publicado no *British journal of psychology* em 1958, construiu esta litografia que liga três tribares constituídos pelo canal da água e os pilares que o sustentam. Se a tentarmos percorrer podemos continuar sem parar indefinidamente. O movimento da água parece estar continuamente a descer ao longo de um canal cujo termo coincide com o ponto mais alto e regressamos ao início de uma nova descida…

Podem distinguir-se dois tipos de ciclos, de acordo com o que representam, alguns dos *mundos impossíveis* como *Queda d'água* (1961) e *Escada acima e escada abaixo* (1960) ou relacionados com estruturas de superfície, ocorrendo um conflito entre duas e três dimensões como *Desenhando-se* (1948) e *Répteis* (1943).

O preenchimento de superfícies pelo seu carácter sistemático sugere um processo ilimitado. A divisão regular da superfície "é a fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi" (Escher, 1994 [1959], p. 7). Nos trabalhos referentes ao preenchimento de superfícies, Escher, baseando-se nas pavimentações do plano, alarga-as ao espaço, tendo algumas delas sido concretizadas fisicamente na forma de esferas, em materiais tais como madeira ou marfim, mostrando o ilimitado num espaço finito, como *Esfera com peixes* (1940). No entanto, a divisão regular do plano não o preenche completamente na sua aproximação ao infinito.

De acordo com Escher (1989 [1958], p. 93), "um plano, que podemos imaginar estendendo-se sem fronteiras em todas as direções, pode ser preenchido ou dividido até ao infinito, de acordo com um número limitado de sistemas, em figuras geométricas similares, contíguas, sem deixar qualquer *espaço livre*". Mais tarde, ele reconhece que a divisão regular da superfície é apenas um pequeno fragmento do infinito, já que não somos capazes de fazer uma superfície plana que se estenda infinitamente, apenas a imaginamos; daí não se tratar de um processo acabado, mas ao invés, que não termina, associado ao *infinito potencial*. Segundo Escher (1994 [1959], p. 9):

> O mesmo formato em todas as componentes não permite mais do que a reprodução dum fragmento duma divisão regular da superfície. Quem quiser representar um número infinito, tem de reduzir gradualmente o tamanho das figuras até ao alcance, pelo menos teoricamente, o limite do infinitamente pequeno.

Relativamente aos limites, utiliza, para preencher o plano, motivos idênticos, sucessivamente mais pequenos, seguindo uma progressão geométrica, até ao limite permitido pela sua visão auxiliada por uma lupa, inseridos em círculos concêntricos. As figuras deixam de ser simplesmente congruentes para se tornarem isomorfas. Segundo Martinho *et al*. (1998, p. 25), "Escher tenta alcançar o limite do infinitamente pequeno de modo a simbolizar o infinito, já não como um processo, mas como uma totalidade". Nas primeiras obras, a redução do tamanho dos motivos ocorria de fora para dentro, mas depois de ver uma pavimentação do plano hiperbólico feita com triângulos, segundo Jules Henri Poincaré, num livro de Harold Coxeter, de introdução à geometria, inverteu essa ordem, passando a redução a dar-se de dentro para fora, considerando que desta forma o conceito seria mais percetível.

A primeira tentativa de representar o infinito como uma totalidade reproduziu-se num entalhe em madeira de 1956 intitulado *Cada vez mais pequeno*, em que as figuras são reduzidas radialmente das margens para o centro, mas esta configuração ainda permanece fragmentária porque, pela junção de figuras maiores, pode ser expandida. Numa carta citada em Ernst (1991 [1978], p. 104-105), Escher afirma:

> O Professor Coxeter chamou-me a atenção para o método da 'redução de dentro para fora', o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em *Cada vez mais pequeno*) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita

Já nas tentativas que realizou com a redução de dentro para fora, isto é, as formas maiores passam a estar no centro e a redução infinita está na margem de forma circular, resultou uma série intitulada *Limites circulares*, constituída por quatro obras. A primeira destas tentativas, *Limite circular I*, concretizada em 1958, não o satisfaz plenamente. Segundo Ernst (1991 [1978], p. 108), "esta xilogravura *Limite circular I*, sendo uma primeira tentativa, mostra um sem número de defeitos".

> No presente caso (…) a ordem das componentes ainda deixa a desejar. Todas as fileiras, por sua vez acentuadas pelos eixos do corpo, consistem em dois peixes brancos que viram a cabeça um para o outro, e dois pretos, cujas caudas se tocam. Assim, não há nenhuma continuidade, nem direcção de movimento ou cor homogénea em cada fileira.
> (Escher, 1994 [1959], p. 10)

A melhor destas xilogravuras é o *Limite circular III*, realizada em 1959. Escher (1994 [1959], p. 10) afirma que "as deficiências do trabalho anterior estão aqui consideravelmente eliminadas”. Posteriormente, realiza a xilogravura, *Limite quadrado*, em 1964, numa tentativa de aperfeiçoar o seu trabalho, mas, numa carta escrita a Coxeter, apercebe-se que a complexidade de conceção das suas gravuras, sugerindo um *infinito atual,* está nitidamente presente nas suas pavimentações não euclidianas, isto é, nos *Limites circulares* e não num *Limite quadrado*, já euclidiano.

> Depois desta satisfação relativa do meu anseio por um símbolo perfeito do infinito (no melhor realizado em *Limite circular III*) tentei compor uma forma quadrada em vez do círculo - porque as paredes retilíneas das nossas casas assim o exigem. Um tanto orgulhoso pela minha descoberta do *Limite quadrado*, enviei uma prova ao Professor Coxeter. O comentário dele foi: trata-se de um desenho ‘muito bonito, mas bastante banal e euc1idiano, por conseguinte não considero isto especialmente interessante. Os limites circulares são mais interessantes porque são não euclidianos’. (Escher citado em Ernst, 1991 [1978], p. 105)

Segundo Ernst (1991 [1978], p. 22-23), a obra de Escher pode ser dividida em quatro períodos diferentes, distinguidos por uma cronologia que se pode conjugar em duas fases, antes e depois de 1937. Nas próprias palavras de Escher (1994 [1959], p. 6):

> A razão porque, a partir de 1938, me concentrei cada vez mais intensamente com a transmissão de ideias pessoais, foi o resultado, em primeira linha, da minha partida de Itália. Na Suiça, na Bélgica e na Holanda, onde sucessivamente me detive, o aspeto exterior da paisagem e da arquitetura sensibilizaram-me menos do que havia sido o caso, sobretudo no sul de Itália. Forçado pelas circunstâncias, tive de me afastar duma reprodução mais ou menos direta e exata do ambiente à minha volta. Esta circunstância estimulou, sem dúvida, em grande medida, a criação de imagens interiores.

Na primeira fase, a maioria das suas gravuras são paisagens e pequenas cidades do sul de Itália, tendo retratado ainda alguns animais, plantas, pessoas, … Nesta fase, Escher evidenciou uma visão muito própria e detalhada para captar a realidade ao enfatizar diversos pormenores. Depois de 1937, o real deixa de ser o centro da sua obra para se tornar num ornamento. A segunda fase é então caracterizada por três períodos: “metamorfoses”, “gravuras subordinadas à perspetiva” e “aproximação ao infinito”.

Dezenas de artigos sobre o ensino da Matemática têm exibido os desenhos de Escher para ilustrar simetrias, rotações, translações, …, mas também para explicar conceitos de álgebra abstrata e da teoria de grupos. Os professores de Matemática começaram a usar a sua obra para representar objetos matemáticos como a fita de Möebius e fractais (Schattschneider, 2010, p. 715). Através da identificação destes e doutros conteúdos na obra de Escher promove-se o conhecimento matemático pela relação entre a Arte e a Matemática (Barth, 2006). Um exemplo disso é a investigação de Sampaio e Coutinho (2007), que realizaram uma experiência de ensino através de uma webquest, numa turma do 12º ano de escolaridade, contemplando a extensão e refinamento das conceções de infinito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Barth, Glauce (2006). *Arte e Matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M. C. Escher*. Tese de mestrado não publicada. Universidade Federal do Paraná.
- Calado, Isabel (1994). *A Utilização Educativa das Imagens*. Porto: Porto Editora.
- Coxeter, Harold (1988). The mathematical implications of Escher's prints. In Locher, J. (1988). *The world of M. C. Escher*. New York: Agradable Press, Harry Abrams Inc. Publishers. p. 51-54.
- Dondis, Donis (1997, [1976]). *La sintaxis de la imagen – introducción al alfabeto visual*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S. A.
- Ernst, Bruno (1991 [1978]). *O espelho mágico de Escher*. Berlim: Taschen.
- Escher, Maurits (1989 [1958]). The regular division of the plane. In *Escher on Escher exploring the infinite*. New York: Harry N. Abrams, Inc. Publishers. p. 90-122.
- Escher, Maurits (1994 [1959]). *Gravura e desenhos*. Köln: Evergreen.
- Lieury, Alain (1997). *Memória e sucesso escolar*. Lisboa: Editorial Presença. p. 45-57.
- Maor, Eli (1991 [1987]). *To infinity and beyond: a cultural history of the infinite*. New Jersey: Princeton university press.
- Martinho, Maria (1996). *O infinito através da obra de M. C. Escher – Uma experiência sobre as concepções acerca do infinito numa turma de Métodos Quantitativos*. Tese de mestrado não publicada. Universidade do Minho.
- Martinho, Maria *et al.* (1998). *M. C. Escher: arte e matemática.* Guimarães: Gráfica Covense, Lda. Associação de Professores de Matemática.
- Munari, Bruno (1968). *Design e comunicação visual.* Lisboa: Edições 70.
- Sampaio, Patrícia & Coutinho, Clara (2007). Aplicação da webquest "Escher e a procura do infinito" numa turma do 12.º ano de escolaridade. In Conferência Internacional de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação – *Challenges 2007*. Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho. p. 350-363.
- Schattschneider, Doris (2010). The Mathematical Side of M. C. Escher. In *Notices of the American Mathematical Society*. USA. Vol. *57*, Nº *6*. Pp. 706-718.

Recebido: 7 de março de 2011.

Aceite: 18 de abril de 2011.